СИНТЕЗ ВІДНОВНИКА ВЕКТОРА СТАНУ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА НАЯВНОСТІ НЕКОНТРОЛЬОВАНИХ ЗБУРЕНЬ

Воловик А. Ю., к.т.н., доц.
Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна

Тематика роботи відноситься до проблеми відновлення повноформатного вектора стану динамічної системи за результатами неповних вимірювань. Оскільки не виключено, що результати вимірювань будуть не зовсім точними, то і результат відновлення буде наближеним. У такому разі, мова може іти тільки про оцінку вектора стану. Якщо вищезгадана проблема вирішується у детермінований спосіб і без явного урахування похибок вимірювань, то вона класифікується як задача динамічного відновлення Луенбергера [1]. У даній роботі розглядаються відновники для стаціонарних динамічних систем, у яких системні невизначеності інтерпретуються як невідомі збурення і в математичній моделі відображаються у вигляді додаткових неконтрольованих входів

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{Bu}(t)+\boldsymbol{Ed}(t) \qquad \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{Cx}(t) \tag{1}$$

де: $\boldsymbol{x}(t)\in \boldsymbol{R}^n$ — вектор стану системи; $\boldsymbol{y}(t)\in \boldsymbol{R}^m$— вектор спостережень; $\boldsymbol{u}(t)\in \boldsymbol{R}^r$ — відомий вектор входу; $\boldsymbol{d}(t)\in \boldsymbol{R}^q$ — невідомий вектор вхідних збурень; **A**, **B**, **C**, **E** — відомі матриці відповідних розмірів.

Оскільки деякі із входів системи (1) невідомі і безпосередньо не вимірюються, то пряме застосування стандартного відновника не можливе. У цьому випадку є доцільним припущення про відсутність апріорних даних про невідомі входи. На основі таких припущень було запропоновано декілька методів розв'язку зазначеної задачі, наприклад: метод декомпозиції, заснований на власних значеннях системної матриці **A** [2]; геометричний підхід [3]; метод формування узагальненої інверсної матриці [4]. Спільною рисою запропонованих методів є надмірна складність процесу проектування та перевірки збіжності оцінок. У даній роботі поставлена задача вирішується на основі співвідношень матричної алгебри. У зв'язку з цим дамо наступне означення.

Означення 1. Стаціонарна динамічна система являє собою відновник повного порядку для системи з неконтрольованим входом (1) у тому випадку, коли похибка оцінювання асимптотично прямує до нуля не залежно від того присутнє чи не присутнє невідоме збурення на її вході.

$$z'(t)=\mathbf{F}z(t)+\mathbf{TB}u(t)+\mathbf{K}y(t)\;\;;\quad x^*(t)=z(t)+\mathbf{H}y(t)\,, \tag{2}$$

де: $\boldsymbol{x}^*(t)\in \boldsymbol{R}^n$— оцінка вектора стану; $\boldsymbol{z}(t)\in \boldsymbol{R}^n$— вектор спостережень; **F, T, K, H** — матриці, які підлягають визначенню у сенсі відповідності до означення 1.

Якщо застосувати відновник (2) до системи (1) то неважко знайти рівняння для похибки :

$$\Delta x'(t) = (\mathbf{A_1} - \mathbf{K_1C})\Delta x(t) + \left[\mathbf{F} - (\mathbf{A_1} - \mathbf{K_1C})\right] z(t) +$$
$$+\left[\mathbf{K_2} - (\mathbf{A_1} - \mathbf{K_1C})\mathbf{H}\right] y(t) + \left[(\mathbf{I} - \mathbf{HC}) - \mathbf{T}\right]\mathbf{Bu}(\mathbf{t}) + (\mathbf{I} - \mathbf{HC})\mathbf{E}d(t).$$

Якщо припустити, що виконується низка умов, а саме:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{HC})\mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{HC}); \ \mathbf{K_2} = \mathbf{FH};$$
$$\mathbf{F} = (\mathbf{A_1} - \mathbf{K_1C}) = (\mathbf{I} - \mathbf{HC})\mathbf{A} - \mathbf{K_1C}; \quad \mathbf{K} = \mathbf{K_1} + \mathbf{K_2}, \tag{3}$$

то похибку оцінювання можна представляти у вигляді $\Delta\boldsymbol{x}'(t) = \Delta\boldsymbol{x}(t)$. За умови стійкості власних значень матриці **F** вона асимтотично прямуватиме до нуля, тобто $\boldsymbol{x}^*(t) \to \boldsymbol{x}(t)$. Це означатиме, що відновник (2) відповідає означенню 1. Знаходження такого відновника визначається розв'язком системи рівнянь (3). Тут ключовим є питання умов, за яких існує розв'язок цієї системи рівнянь, оскільки з чисто практичних міркувань матриці **H** і **C** вибираються прямокутними з неповним рангом, тобто $m<n$. Необхідні та достатні умови існування таких розв'язків даються теоремою:

Теорема 1. Для того, щоб динамічна система (2) була відновником для об'єкта з неконтрольованим входом (1) необхідно і достатньо виконання таких умов: а) $rank(\mathbf{CE}) = rank(\mathbf{E})$; б) парі $(\mathbf{C}, \mathbf{A}_1)$ була притаманна властивість виявлюваності, а матриця $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{E}\left[(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}\mathbf{CE}\right]^{-1}(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}\mathbf{CA}$. Доказ теореми 1 опирається на доказ двох допоміжних теорем — лем, які відповідають умовам а), б).

Лема 1.1. Якщо $rank(\mathbf{CE}) = rank(\mathbf{E})$, то рівняння $(\mathbf{I} - \mathbf{HC})\mathbf{E} = 0$ має розв'язок, а одним з можливих розв'язків є

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{E}\left[(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}\mathbf{CE}\right]^{-1}(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

де, $(\mathbf{CE})^{\#} \equiv \left[(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}\mathbf{CE}\right]^{-1}(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}$ — псевдообернена матриця Пенроуза.

Необхідні умови. Припустимо, що рівняння $(\mathbf{I} - \mathbf{HC})\mathbf{E} = 0$; має розв'язок, тоді справедливо $\mathbf{H}^*\mathbf{CE} = \mathbf{E}$, а це еквівалентно тому, що $(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{*\mathrm{T}} = \mathbf{E}^{\mathrm{T}}$. У свою чергу, це означає, що $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ являє собою підпростір матриці $(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}$ і спонукає зробити висновок, що $rank(\mathbf{E}^{\mathrm{T}}) \le rank(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}$ або $rank(\mathbf{E}) \le rank(\mathbf{CE})$. Проте, з іншого боку повинна виконуватись умова

$$rank(\mathbf{CE}) = \min\left[rank(\mathbf{C}), rank(\mathbf{E})\right] \le rank(\mathbf{E}) \tag{5}$$

Одночасно задовольнити ці антагоністичні умови можливо лише тоді, коли $rank(\mathbf{CE}) = rank(\mathbf{E})$. Таким чином, необхідні умови доказані.

Достатні умови. Коли справедливо, $rank(\mathbf{CE}) = rank(\mathbf{E})$ то це означає, що **CE** являє собою матрицю-стовпець повного рангу, а для такої матриці існує інверсія зліва, тобто має місце $(\mathbf{CE})^{\#} = \left[(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}\mathbf{CE}\right]^{-1}(\mathbf{CE})^{\mathrm{T}}$. Цілком зрозуміло, що у цьому разі $\mathbf{H}^* = \mathbf{E}(\mathbf{CE})^{\#}$ може бути розв'язком рівняння $(\mathbf{I} - \mathbf{HC})\mathbf{E} = 0$. Достатні умови доказані.

Лема 1.2. Припустимо, що матрицю $\mathbf{C}_1$ можна представити у вигляді $\mathbf{C}_1 = [\mathbf{C} \ \ \mathbf{CA}]^{\mathrm{T}}$ тоді, якщо парі $(\mathbf{C}_1, \ \mathbf{A})$ притаманна властивість виявлюваності, то це рівноцінно виявлюваності пари $(\mathbf{C}, \ \mathbf{A})$.

Доказ леми. Припустимо, що пара $(\mathbf{C}_1, \ \mathbf{A})$ може бути виявленою, тобто у складі вектора $\boldsymbol{x}(t)$ є мода $\boldsymbol{s_1}$ *, яка не* е спостерігається, проте належить до простору стійких мод. У цьому разі вона інваріантна до системної матриці **A** і розв'язана с виходом системи [1]. Унаслідок цього $rank\begin{bmatrix} \mathbf{s_1 I - A} \\ \mathbf{C_1} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} \mathbf{s_1 I - A} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} < \mathbf{n}$. Це означає, що знайдеться такий вектор $\alpha \in \mathbf{C^n}$, що $\begin{bmatrix} \mathbf{s_1 I - A} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}\alpha = 0$. Але це ж рівноцінно тому, що $\begin{bmatrix} \mathbf{s_1 I - A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}\alpha = 0$, або $rank\begin{bmatrix} \mathbf{s_1 I - A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < \mathbf{n}$ тобто s_1 є також неспостережуваною модою для пари $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$. Тепер, якщо припустити, що $s_2 \in \mathbf{C^n}$ є неспостережуваною модою для пари$(\mathbf{C}, \mathbf{A})$, то по аналогії s_1 — є також неспостережуваною модою для пари$(\mathbf{C}, \mathbf{A})$. Оскільки, пари $(\mathbf{C}_1, \mathbf{A})$ і $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ мають однакові неспостережувані моди, то їх властивості щодо виявлюваності формально співпадають, тобто одинакові. Лема доказана.

Перелік посилань

1. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы / Х. Квакернаак, Р. Сиван // Пер. с англ. В. А. Васильева, Ю. А. Петрова. — М. : Мир. 1977. — 650 с.

2. Miller R. J. On desinging reduced-order observers for linear time-invariant systems subject to unknown inputs / R. J. Miller, R. Mukundan // Int. J. Control.— 1982.— 35(1).— P. 183—188.

3. Bhattacharyya S. P. Observer design for linear systems with unknown inputs // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1978. — AC-23 — P. 483—484.

4. Kobayashi N. An observer design for linear systems with unknown inputs / N. Kobayashi, R. Nakamizo // Int. J. Control.— 1982. —35.— P. 605—619.1. Ахмед Н. Ортогональные преобразования при обработке цифрових сигналов / Н. Ахмед, К. Р. Рао. — М. : Связь, 1980. — 248 с.

Анотація

Методами матричної алгебри синтезовано відновник повноформатного вектора стану стаціонарної динамічної системи за наявності неконтрольованих збурень на її входах. Встановлені необхідні та достатні умови існування такого відновника.

Ключові слова: динамічна система, вектор стану, відновник Луенбергера.

Аннотация

Методами матричной алгебры синтезирован восстановитель вектора состояния динамической системы при наличии не контролированных возмущений на её входах. Установлены необходимые и достаточные условия существования восстановителя.

Ключевые слова: вектор состояния системы, восстановитель Луенбергера.

Abstract

A reducer of a state vector of dynamic system in the presence of not controlled disturbings on its inputs is synthesized by methods of matrix algebra. Necessary and sufficient living conditions of a reducer are set.

Keywords: state vector of system, Luyenberger's reducer.